- *vnitřek* A° množiny A definujeme jako množinu všech bodů, které jsou v A i s nějakým okolím

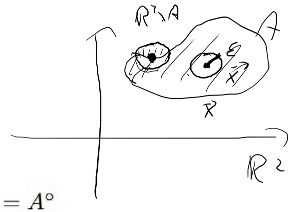
$$x \in A^\circ \overset{\text{def}}{\iff} (\exists\, \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x) \subseteq A$$

- *hranice* ∂A množiny A je množina všech bodů, jejichž libovolná okolí zasahují jak do samotné množiny A, tak do jejího doplňku $\mathbb{R}^n \setminus A$

$$x \in \partial A \overset{\text{def}}{\iff} (\forall\, \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \neq U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$$

- *uzávěr* $\overline{A}$ množiny A si definujeme jako množinu všech bodů, ke kterým se můžeme přiblížit libovolně blízko z množiny A.

$$x \in \overline{A} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall\, \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$$



- $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$
- A je otevřená $\Leftrightarrow A = A^\circ$
- A je uzavřená $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

$\overline{A} = A \cup \partial A$

Určete vnitřek, hranici a uzávěr definičních oborů následujících funkcí:

$$f(x, y) = \arcsin(4 - x^2 - y^2) + \arcsin(2xy);$$

$$\begin{cases} -1 \le 4 - x^2 - y^2 \le 1 \\ -1 \le 2xy \le 1 \end{cases}$$

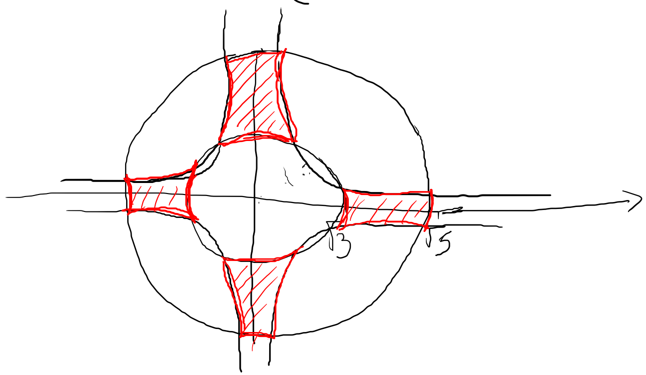
$$\begin{cases} 4 - x^2 - y^2 \le 1 \\ 4 - x^2 - y^2 \geq -1 \\ 2xy \le 1 \\ 2xy \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 3 \\ x^2 + y^2 \le 5 \\ xy \le 1/2 \\ xy \geq -1/2 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 3$

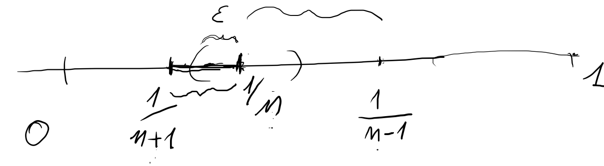
$xy = 1/2$

$xy = -1/2$



$D(f)$

Určete izolované a hromadné body množiny $M = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.



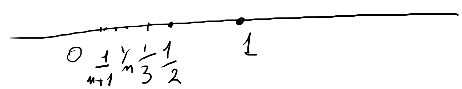
x izol. $\quad \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap M = \{x\}$

x hrom. $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad P_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$

$$P_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$$

$M = A \times A$

$A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$

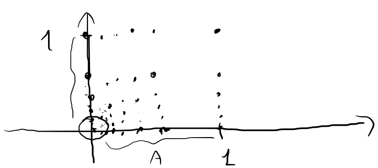


$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

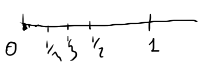
všechny body množiny A jsou izolované

$\forall n: \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2n(n+1)} \qquad U_\varepsilon(x) \cap A = \{\frac{1}{n}\}$

$M = A \times A$



hrom. A



$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad 0$ je hr. bod pro A

hrom. body množiny $M = \{(0,0)\} \cup \{(\frac{1}{n}, 0); n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, \frac{1}{m}), m \in \mathbb{N}\}$

Sestrojte příklady neprázdných množin M v $\mathbb{R}^2$, že

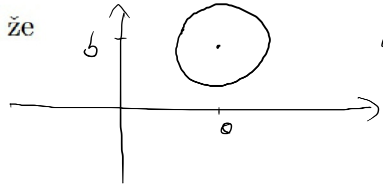
(a) nemá žádný vnitřní bod,

(b) nemá žádný hraniční bod,

(c) nemá žádný vnější bod, M

(d) nemá žádný hromadný bod,

(e) nemá žádný izolovaný bod.



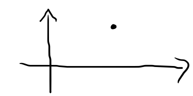
$\{(x,y) : (x-a)^2+(y-b)^2=2\}$

$\mathbb{R}^2$

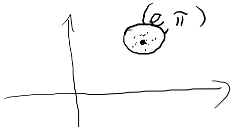
b) $\overline{M} = M \cup \underbrace{\partial M}_{=\emptyset} \iff \overline{M} = M$

$\overline{M} = M^\circ \cup \underbrace{\partial M}_{=\emptyset} \iff \overline{M} = M^\circ = M$ M je otevřená a uzavřená, $\emptyset$, $\mathbb{R}^2$

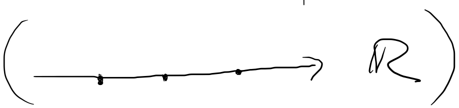
[ne otev. ne uzav.


]

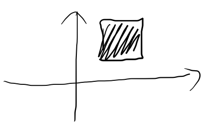
c) M hustá

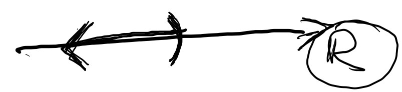


(e,π) $\mathbb{R}^2$

d)  $\mathbb{N}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$

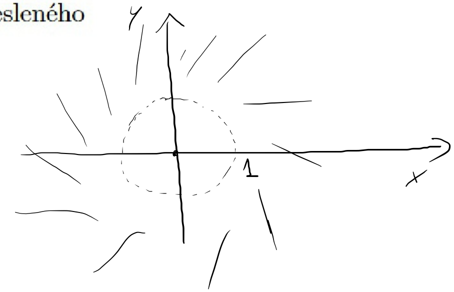
$\{(x,y) : x^2+y^2<1\}$

e) 



→ Jsou-li vrstevnice soustředné kružnice pak graf funkce $f(x, y)$ se nezmění při rotaci kolem osy z. Skutečně se tedy jedná o rotační plochu, kterou získáme rotací *libovolného* řezu grafu funkce rovinou, která je kolmá na rovinu xy a prochází počátkem. Například je možno volit rovinu o rovnici $y = 0$ (souřadnicová rovina xz) a popsat tak graf funkce jako výsledek rotace grafu pomocné funkce $h(x) = f(x, 0)$ nakresleného v rovině xz.

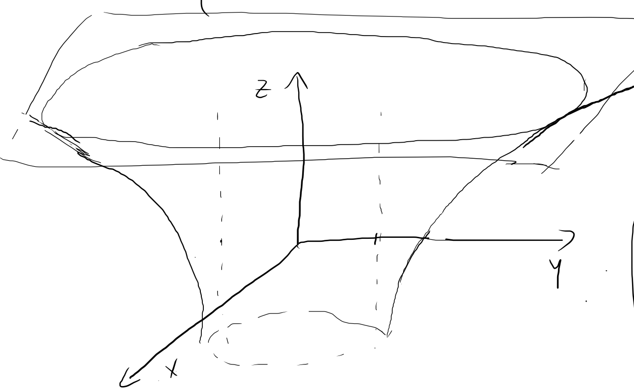
$$x^2+y^2-1>0$$



$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1).$$

$D(f)$

$$\begin{cases} z=\ln(x^2+y^2-1) \\ x=0 \end{cases} \longrightarrow z=\ln(y^2-1)$$



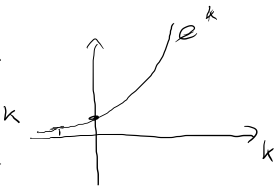
$z=k$

$$\begin{cases} z=\ln(x^2+y^2-1) \\ z=k \quad k\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\ln(x^2+y^2-1)=k$$

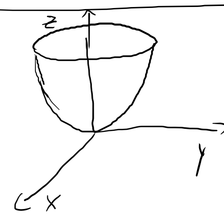
$$x^2+y^2-1=e^k$$

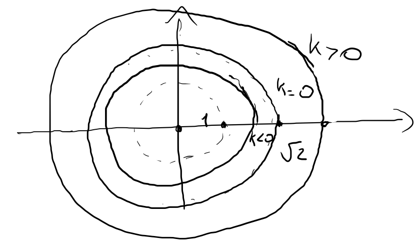
$$\underline{\underline{x^2+y^2=1+e^k}}$$



$f(x,y)=x^2+y^2$

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ \cancel{x}=0 \end{cases}$$





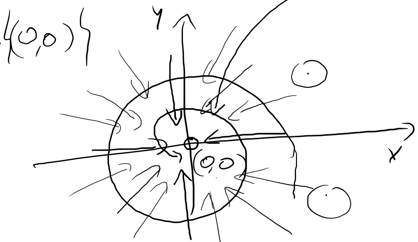
Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu (někde je výhodné použít polární souřadnice):

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$, neex.

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$. neex.

3) ($\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ $\underline{\varepsilon, \delta}$ $\underline{\text{polar. sou.}}$)

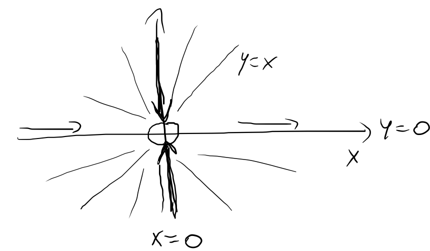
$D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2} = 1$

1) $x = 0 \rightsquigarrow \lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} \frac{-y^2}{y^2} = -1$ $\neq$

$y = 0 \rightsquigarrow \lim\limits_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4} = 1$



2) $x=0 \rightsquigarrow \lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{y^4}} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$; $y=0 \rightsquigarrow \lim\limits_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^4}} = 1$

$y=x \rightsquigarrow \lim\limits_{(x,x)\to(0,0)} \frac{2x^2}{\sqrt{2x^4}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2}{\sqrt{2}\,x^2} = \sqrt{2} \neq 1$

3) $x=0 \rightsquigarrow \lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{|y|} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$; $y=0$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{|x|} = 0$; $y=x$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2}{\sqrt{2}|x|} = 0$

$\sqrt{2}\,|x|$

$|y^2| = y^2$

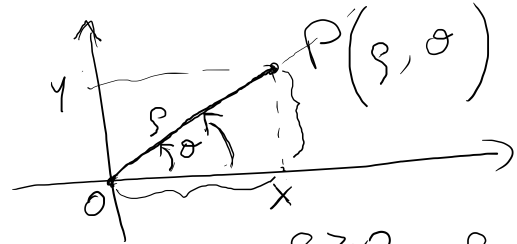
$\sqrt{y^2} = |y|$

$\sqrt{y^4} = |y^2| = y^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in\langle 0,2\pi)}} \frac{2\rho^{\cancel{2}}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{\sqrt{\rho^2}}} = 0$$

polar. souř.



$\underline{\underline{\rho \geq 0}}$ $\quad \rho = \|\vec{PO}\|$

$0 \leq \theta < 2\pi$

(nebo $-\pi \leq \theta \leq \pi$)

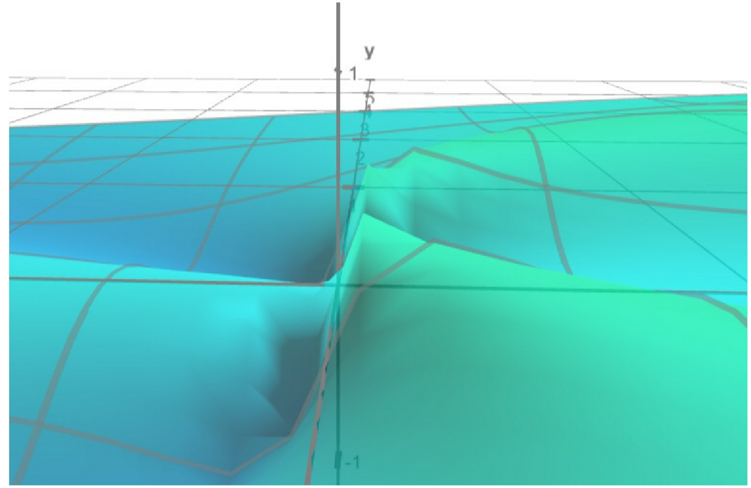
$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

$x^2+y^2 = \rho^2 \qquad \sqrt{\rho^2} = \rho$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$ neex.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8x^2y}{x^2+y^2}$$



$x=0 \quad \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^4} = 0$

$x=y^2 \quad \lim_{(y^2,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

(ε, δ)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = ? \qquad \forall (x,y): \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{8x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$

$$\left| \frac{8x^2y}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon \iff \frac{8x^2|y|}{x^2+y^2} \le \frac{8(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} = 8|y| = 8\sqrt{y^2} \le$$

$$\le 8\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$$

$$\delta = \varepsilon/8$$

Spočtěte parciální derivace a obory jejich existence pro

(a) $f(x, y) = x^2 y + \ln(x + 2y)$,

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$,

Spočtěte parciální derivace a obory jejich existence pro

(c) $f(x, y) = (xy)^{\sqrt{x^2+y^2}}$.